Законспектировать ПОЛНОСТЬЮ теоретический материал

Тема «Производная и дифференциал.»

1. **Производная функции.**

Формулы производных. Даны функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, которые имеют производные в точках. Для них справедливы следующие формулы:

сумма:	$(u+v)' = u' + v'$,
разность:	$(u-v)' = u' - v'$,
произведение:	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$,
частное:	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Таблица производных

1.	$(c)' = 0,\ c = const$	9.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(cu)' = c \cdot u',\ c = const$	10.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	11.	$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4.	$(x)' = 1$	12.	$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	13.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.	$(e^x)' = e^x$	14.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7.	$(Ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$	15.	$(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8.	$(Log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	16.	$(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Примеры вычисления производной функций:

1) $y = \sqrt[6]{x^5}$

$$y' = \left(\sqrt[6]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{6}}\right)' = \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{5}{6x^{\frac{1}{6}}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$

2) $y = \dfrac{6}{x^7}$

$$y' = \left(\frac{6}{x^7}\right)' = \left(6x^{-7}\right)' = 6\cdot(-7)x^{-7-1} = -42x^{-8} = -\frac{42}{x^8}$$

3) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^7}}$

$$y' = \left(\frac{4}{\sqrt{x^7}}\right)' = \left(\frac{4}{x^{\frac{7}{2}}}\right)' = \left(4x^{-\frac{7}{2}}\right)' = \overset{2}{\cancel{4}}\left(-\frac{7}{\cancel{2}}\right)x^{-\frac{7}{2}-1} =$$

Производная суммы (разности)

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

Пример: $y = 2\sqrt{x^5} - \frac{3}{x^{10}} + \frac{2}{\sqrt[10]{x}}$

$y' = \left(2\sqrt{x^5} - \frac{3}{x^{10}} + \frac{2}{\sqrt[10]{x}}\right)' = (2x^{\frac{5}{2}})' - (3x^{-10})' + \left(\frac{2}{x^{\frac{1}{10}}}\right)' =$

$= (2x^{\frac{5}{2}})' - (3x^{-10})' + (2x^{-\frac{1}{10}})' = 2\cdot\frac{5}{2} x^{\frac{5}{2} - 1} - 3\cdot(-10)x^{-10-1} +$

$+ 2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)x^{-\frac{1}{10}-1} = 5x^{\frac{3}{2}} + 30x^{-11} - \frac{1}{5} x^{-\frac{11}{10}} = 5\sqrt{x^3} + \frac{30}{x^{11}} -$

$- \frac{1}{5x^{\frac{11}{10}}} = 5\sqrt{x^3} + \frac{30}{x^{11}} - \frac{1}{5\sqrt[10]{x^{11}}}$

Производная произведения $(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$

Пример: $y = x^5\cdot e^x$

$y' = (x^5 \cdot e^x)' = (x^5)'e^x + x^5(e^x)' = 5x^4\cdot e^x + x^5\cdot e^x$

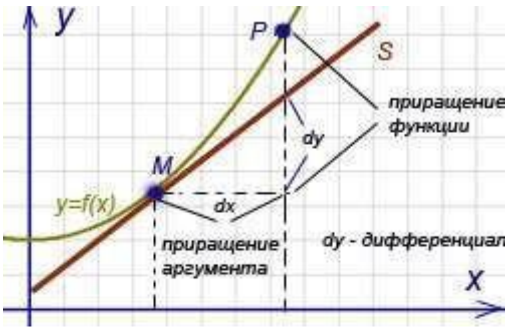
Производная деления $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Пример: $y = \frac{e^x}{x^5}$

$y' = \left(\frac{e^x}{x^5}\right)' = \frac{(e^x)'x^5 - e^x(x^5)'}{(x^5)^2} = \frac{e^x\cdot x^5 - e^x\cdot 5x^4}{x^{10}}$

2. Дифференциал функции.

Определение. Дифференциалом функции в некоторой точке *x* называется главная, линейная часть приращения функции.



Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной *x* (аргумента).

Это записывается так:

$dy = y'\Delta x$

или

$df(x) = f'(x)\Delta x$

или же

$df(x) = f'(x)dx$

Дифференциал функции y=f(x) обозначают dy или df(x)

Следовательно, dy=f$^{/}$(x)dx

Задание: вычислить дифференциалы функций:

1) $y = 2x^2 + 3\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^2}$

Преобразуем данную функцию:

$y = 2x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} + 5x^{-2} = 2x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 5x$

$dy = y' \cdot dx = \left(2x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 5x^{-2}\right)' \cdot dx =$

$= \left(2 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} + 5(-2)x^{-2-1}\right) dx$

$= \left(4x + \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} - 10x^{-3}\right) dx = \left(4x + \frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}} - \frac{10}{x^3}\right) dx = \left(4x + \frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{10}{x^3}\right) dx$

2) $y = 2x^5 \cdot e^x$

$dy = y' \cdot dx = (2x^5 \cdot e^x)' dx = \left((2x^5)' e^x + 2x^5 (e^x)'\right) dx =$

$= (10x^4 \cdot e^x + 2x^5 \cdot e^x) dx$

3) $y = \frac{e^x}{3x^4}$

$dy = y' \cdot dx = \left(\frac{e^x}{3x^4}\right)' dx = \frac{(e^x)' \cdot 3x^4 - e^x (3x^4)'}{(3x^4)^2} \cdot dx =$

$= \frac{e^x \cdot 3x^4 - e^x \cdot 12x^3}{9x^8} \cdot dx = \frac{\cancel{3}x^3 (e^x \cdot x - e^x \cdot 4)}{\cancel{9}_{3} x^8} \cdot dx =$

$= \frac{e^x \cdot x - 4e^x}{3x^5} dx$