В тетради запишите тему урока. Законспектируйте следующий теоретический материал:

Тема «Рациональные неравенства. Линейные неравенства»

Неравенство — это алгебраическое выражение, в котором используются знаки ≠, <, >, ≤, ≥.
Линейные неравенства — это неравенства вида:

- ax + b < 0,
- ax + b > 0,
- ax + b ≥ 0,
- ax + b ≤ 0,

где a и b — любые числа, a ≠ 0, x — неизвестная переменная
Решение — значение переменной, при котором неравенство становится верным.
Решить неравенство значит сделать так, чтобы в левой части осталось только неизвестное в первой степени с коэффициентом равном единице.
Типы неравенств

1. **Строгие — используют только больше (>) или меньше (<):**

- a < b — это значит, что a меньше, чем b.
- a > b — это значит, что a больше, чем b.
- a > b и b < a означают одно и тоже, то есть равносильны.

2. **Нестрогие — используют сравнения ≥ (больше или равно) или ≤ (меньше или равно):**

- a ≤ b — это значит, что a меньше либо равно b.
- a ≥ b — это значит, что a больше либо равно b.
- знаки ⩽ и ⩾ являются противоположными.

Линейные неравенства: свойства и правила

1. Если a > b , то b < a. Также наоборот: a < b, то b > a.
2. Если a > b и b > c, то a > c. И также если a < b и b < c, то a < c.
3. Если a > b, то a + c > b+ c (и a – c > b – c).

Если же a < b, то a + c < b + c (и a – c < b – c). К обеим частям можно прибавлять или вычитать одну и ту же величину.

4. Если a > b и c > d, то a + c > b + d.

Если a < b и c < d, то a + c < b + d.
Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Но важно перепроверять из-за возможных исключений. Например, если из 12 > 8 почленно вычесть 3 > 2, получим верный ответ 9 > 6. Если из 12 > 8 почленно вычесть 7 > 2, то полученное будет неверным.

5. Если a > b и c < d, то a – c > b – d.

Если a < b и c > d, то a – c < b – d.
Из одного неравенства можно почленно вычесть другое противоположного смысла, оставляя знак того, из которого вычиталось.

6. Если a > b, m — положительное число, то m·a > m·b и

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

Обе части можно умножить или разделить на одно положительное число (знак при этом остаётся тем же).

Если же a > b, n — отрицательное число, то n·a < n·b и

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

Обе части можно умножить или разделить на одно отрицательное число, при этом знак поменять на противоположный.

7. Если a > b и c > d, где a, b, c, d > 0, то a·c > b·d.

Если a < b и c < d, где a, b, c, d > 0, то a··c < b·d.

Неравенства одного смысла на множестве положительных чисел можно почленно перемножать.

Следствие данного правила или квадратный пример: если a > b, где a, b > 0, то $a^2 > b^2$, и если a < b, то $a^2 < b^2$. На множестве положительных чисел обе части можно возвести в квадрат.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое трансформирует его в верное числовое неравенство.

Важно знать

Два неравенства можно назвать равносильными, если у них одинаковые решения.

Чтобы упростить процесс нахождения корней неравенства, нужно провести равносильные преобразования — то заменить данное неравенство более простым. При этом все решения должны быть сохранены без возникновения посторонних корней.

Свойства выше помогут нам использовать следующие правила.

Правила линейных неравенств

1. Любой член можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком. Знак неравенства при этом не меняется.
   - 2x − 3 > 6 ⇒ 2x > 6 + 3 ⇒ 2x > 9.
2. Обе части можно умножить или разделить на одно положительное число. Знак неравенства при этом не меняется.
   - Умножим обе части на пять 2x > 9 ⇒ 10x > 45.
3. Обе части можно умножить или разделить на одно отрицательное число. Знак неравенства при этом меняется на противоположный.
   - Разделим обе части на минус два 2x > 9 ⇒ 2x : –2 > 9 : -2 ⇒ x < 4,5.

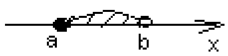
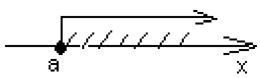
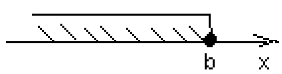
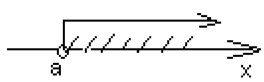
Алгоритм решения ax + b < 0 при a ≠ 0

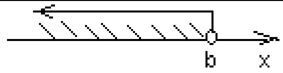
- перенесем число b в правую часть с противоположным знаком,
- получим равносильное: ax < −b;

- произведем деление обеих частей на число не равное нулю.

Когда а положительное, то знак остается, если а — отрицательное, знак меняется на противоположный.

Числовые промежутки.

вид промежутка	*геометрическое изображение*	*обозначение*	*запись, с помощью неравенства*
Интервал		$(a;b)$	$a< x< b$
Отрезок		$[a;b]$	$a\leq x\leq b$
Полуинтервал		$(a;b]$	$a< x\leq b$
Полуинтервал		$[a;b)$	$a\leq x <b$
Луч		$[a;+\infty)$	$x\geq a$
Луч		$(-\infty;b]$	$x\leq b$
Открытый луч		$(a;+\infty)$	$x>a$

Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x<b$

Пример 1

Решить неравенство: $4(x - 1) \geq 5 + x$

Решение:

$4(x - 1) \geq 5 + x$ Раскроем скобки:

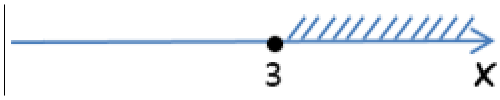
$4x - 4 \geq 5 + x$ Соберем члены, связанные с переменной x в левую часть неравенства, числа (свободные члены) в правую часть неравенства. Помним, что при переносе слагаемого из одной части неравенства в другую часть- его знак меняется на противоположный. Получим:

$4x - x \geq 5 + 4$

$3x \geq 9$ | (:3) Так как делим на положительное число (3), то знак неравенства сохранится. Получим:

$x \geq \frac{9}{3}$

$x \geq 3$



Ответ: $x \in [3;+\infty)$

Пример 2

Решить неравенство: $x + 2 < 3(x + 2) - 4$

Решение:

$x + 2 < 3(x + 2) - 4$

$x + 2 < 3x + 6 - 4$

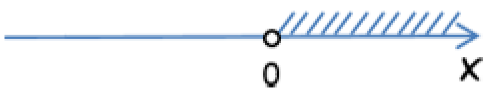
$x - 3x < 6 - 4 - 2$

$-2x < 6 - 6$

$-2x<0$ | :(−2) Так как делим на отрицательное число (-23), то знак неравенства поменяется на противоположный. Получим:

$x > \frac{0}{-2}$

$x > 0$



Ответ: $x \in (-\infty; 0)$

Выполните самостоятельно следующие задания

Решить неравенства:

$5x - (3x - 1)2 > 9x(4 - x)$;

$3x - 1 - (6x - 2)2 < (2 - 3x)(1 + 12x)$;

$2x + 6 - (4x - 3)(1 - 16x) \geq (3 - 8x)$;

$(x + 5)(x - 2) - (x - 3)2 > 7x + 1$;