Переписать в тетрадь данный теоретический материал! Вместе с примерами и со всеми пояснениями! Без сокращений!

Свои конспекты прислать мне ТОЛЬКО В ЛИЧНОЕ СООБЩЕНИЕ В КОНТАКТ

https://vk.com/id588363475

РАБОТЫ В КОММЕРАРИЯХ НА САЙТЕ НЕ ПРИНИМАЮ!!!

Тема «Частные производные высших порядков.»

Частные производные функции $z=f(x;y)$, в свою очередь, являются функциями двух переменных. Следовательно, их можно снова дифференцировать по каждой из переменных, считая другую постоянной величиной. В результате получают **частные производные второго порядка:** z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yx}; z''_{yy}. Каждую из этих производных можно снова дифференцировать по обеим переменным, получая **производные третьего порядка функции $z=f(x;y)$:** z'''_{xxx}; z'''_{xxy}; z'''_{xyx}; z'''_{xyy}; z'''_{yyy}; z'''_{yxx}; z'''_{yxy}; z'''_{yyx}.

Продолжая процесс n раз, получим частные производные n-го порядка.

Пример:

Найти частные производные 2- го порядка для функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Решение:

шаг 1. сначала найдем частные производные функции (частные производные первого порядка):

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$
$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} – вторая производная по «икс»

z''_{yy} – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} – *смешанная* производная «игрек по икс»

Для удобства перепишем уже найденные частные производные первого порядка:

$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$

$z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:

берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

Аналогично:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$