Переписать в тетрадь данный теоретический материал! Вместе с примерами и со всеми пояснениями! Без сокращений!

Свои конспекты прислать мне ТОЛЬКО В ЛИЧНОЕ СООБЩЕНИЕ В КОНТАКТ

https://vk.com/id588363475

РАБОТЫ В КОММЕРАРИЯХ НА САЙТЕ НЕ ПРИНИМАЮ!!!

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
16. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

Определённый интеграл

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется ***определённым интегралом от a до b функции f (x):***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Числа a и b называются ***пределами интегрирования, а – нижним, b – верхним.*** Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования.*** Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией,*** а переменная x – ***переменной интегрирования.*** Формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница.***

Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если a<c<b, то $\displaystyle \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 1: Вычислить $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$.

Решение**:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg0\right) = 3$$

Пример 2: Вычислить $\displaystyle \int_0^{\pi} \left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx$

Решение: $\displaystyle \int_0^{\pi} \left(2e^{2x} + 3\cos x\right)dx = 2\int_0^{\pi} e^{2x}dx + 3\int_0^{\pi} \cos x dx = \left(e^{2x} + 3\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \left(e^{2\pi} + 3\sin\pi\right) - \left(e^0 + 3\sin 0\right) =$

$= e^{2\pi} - 1 \approx 534{,}492$

Пример 3. Вычислить $\displaystyle \int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

Решение*:* $\displaystyle \int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \cdot dx = 4\int_1^8 xdx - \frac{1}{3}\int_1^8 x^{-2/3}dx = 2x^2\Big|_1^8 - \sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= 2(8^2 - 1) - (\sqrt[3]{8} - 1) = 2 \cdot 63 - 1 = 125$

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\displaystyle \int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной *u.* При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1, которые находятся из исходной подстановки: $a_1 = \varphi(a), \quad b_1 = \varphi(b)$.

Пример 4. Вычислить $\displaystyle \int_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0,\quad то\quad t = 0$, если $x = 2,\ то\quad t = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt = 2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$