

УРОК №15.

Тема занятия: ДИНАМИКА. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Тип урока: комбинированный.

Вопросы:

1. Введение в динамику. Основные понятия.
2. Законы динамики.
3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки
4. Основные задачи динамики.
5. Примеры решения задач.
6. Тесты для самоконтроля.

Задание для студентов: просмотреть видеоролик, изучить материал, выполнить конспект теоретической части, внимательно изучить примеры решения задач. ответить на тесты.

<https://yandex.ru/video/preview/?filmId=3217268637921674576&from=tabbar&parent-reqid=1636430021841145-7276373737906975335-vla1-1515-vla-17-balancer-8080-BAL-8908&text=основные+понятия+и+законы+в+динамике+лекция>

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамика (от греч. *dinamikos* – сильный) – раздел теоретической механики, в котором изучаются движения материальных объектов в зависимости от действующих на них сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку при изучении его движения. Поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Механические системы и сплошные тела – это более сложные материальные объекты, считается, что они состоят из материальных точек.

В классической механике пространство считается трёхмерным евклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нём материальных объектов. Время инвариантно по отношению к выбору системы координат.

Свойства сил, приложенных к твёрдому телу и точке, рассматривались в разделе «Статика». В динамике силы оцениваются по их динамическому действию, то есть по изменению ими характеристик движения материальных объектов.

Массой точки называется физическая величина, которая является количественной мерой инертности точки. В механике масса рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого тела. Также массу можно назвать мерой гравитационных свойств тела (по закону всемирного тяготения).

В общем случае движение тела зависит не только от его массы и приложенных сил. Характер движения может зависеть от формы тела, т. е. от распределения масс.

Инертность тела – это его свойство быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Курс динамики принято разделять на динамику точки и динамику системы материальных точек.

1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ГАЛИЛЕЯ – НЬЮТОНА

В основу классической механики положены законы Ньютона, которые были получены им путём обобщений целого ряда опытных данных и теоретических исследований.

I. Закон инерции, открытый Галилеем (1638 г.)

Изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

Система отсчёта, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной или галилеевой системой отсчёта*, т. е. условно называемой неподвижной или движущейся прямолинейно и равномерно по отношению к «абсолютному пространству».

Неинерциальной системой отсчёта называется та, в которой закон инерции не выполняется, она движется с ускорением по отношению к «абсолютному пространству».

Из закона инерции следует, что если на точку не действуют силы или действующие силы уравновешены, то точка покоится или движется с постоянной по направлению и модулю скоростью. В противном случае точка движется с ускорением.

II. Основной закон динамики (второй закон Ньютона)

В инерциальной системе отсчёта вектор ускорения материальной точки пропорционален равнодействующей всех сил, действующих на точку, включая реакции связей, направлен вдоль линии действия силы и обратно пропорционален массе точки.

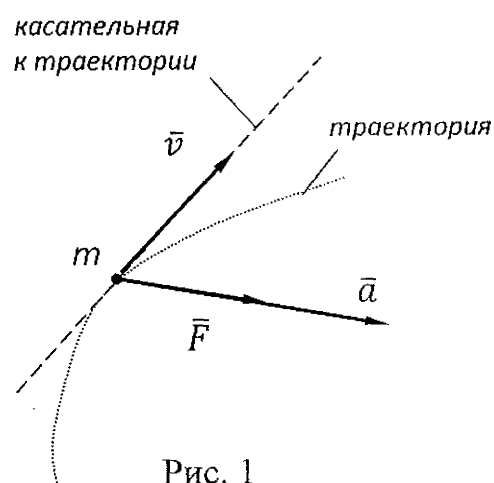
$$m \cdot \bar{a} = \bar{F},$$

где \bar{F} – равнодействующая всех сил, приложенных к точке;

m – масса материальной точки;

\bar{a} – ускорение точки (рис. 1).

Основной закон динамики выполняется только в инерциальных системах отсчёта.



III. Закон о равенстве сил действия и противодействия

При взаимодействии двух тел между ними возникают силы равные по величине и противоположные по направлению.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

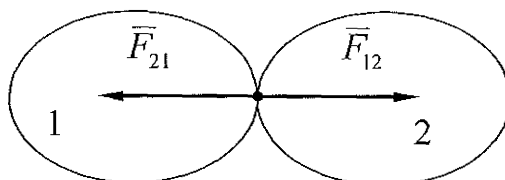


Рис. 2

В природе не существует одностороннего действия. Силы действия и противодействия приложены к разным телам (рис. 2) и поэтому не могут компенсировать друг друга – не являются системой сил, эквивалентной нулю.

Принцип суперпозиции (закон независимости действия сил)

Система сил, действующая на материальную точку, сообщает ей такое ускорение, какое сообщила бы одна сила, равная их равнодействующей.

Закон независимого действия сил следует понимать как закон суперпозиции сил, т. е. как закон сложения ускорений от действия отдельных сил. С учётом этого закона основное уравнение динамики материальной точки примет вид

$$m \cdot \vec{a} = \Sigma \vec{F}_k. \quad (1)$$

1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим движение материальной точки под действием приложенных к ней сил (рис. 3), равнодействующая которых равна \vec{F} . Подставив во второй закон Ньютона ускорение в виде второй производной по времени от радиус-вектора, получим *дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме*

$$m\ddot{\vec{r}} = \Sigma \vec{F}. \quad (2)$$

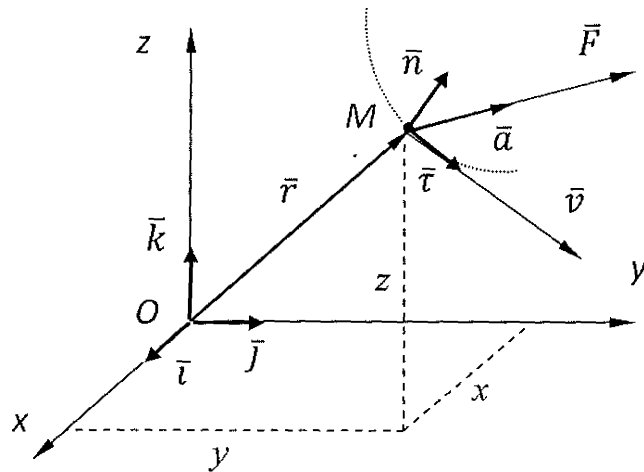


Рис. 3

В декартовой системе координат дифференциальные уравнения движения точки примут вид (3)

$$\begin{aligned}
 ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z \text{ или} \\
 m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – проекции ускорения на оси декартовых координат;

F_x , F_y , F_z – проекции силы на те же оси декартовых координат.

В случае прямолинейного движения точки, направив одну из координатных осей (например, Ox) по движению, получим только одно уравнение $m\ddot{x} = F_x$.

Уравнения движения в проекциях на оси естественных координат (касательную, главную нормаль и бинормаль) запишутся в виде (4)

$$\begin{aligned}
 ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b \text{ или} \\
 m\ddot{s} = F_\tau, \quad mv^2/\rho = F_n, \quad 0 = F_b,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где a_τ , a_n , a_b – проекции ускорения на естественные оси координат;

F_τ , F_n , F_b – проекции силы на естественные оси координат,

s – дуговая координата точки;

ρ – радиус кривизны траектории.

Основное уравнение динамики остаётся справедливым для несвободной материальной точки, на которую наложены связи. В этом случае, в число действующих на точку сил следует включить и силы реакций связей.

1.3 ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

В динамике решаются две основные задачи – прямая и обратная.

Первая (прямая) задача динамики. По известным кинематическим уравнениям и массе точки требуется определить силу, вызывающую данное движение.

Задача 1. Материальная точка массой 2 кг движется относительно инерциальной системы отсчёта Oxy в соответствии с уравнениями $x = 2 \sin(\pi t/4) + 2$; $y = 2 \cos(\pi t/4)$. Через 1 с после начала движения определить модуль силы F , вызывающей это движение.

Решение. Движение точки задано координатным способом. Исключив из уравнений движения переменную t , найдём уравнение траектории – ею является окружность радиуса 2 м (рис. 4).

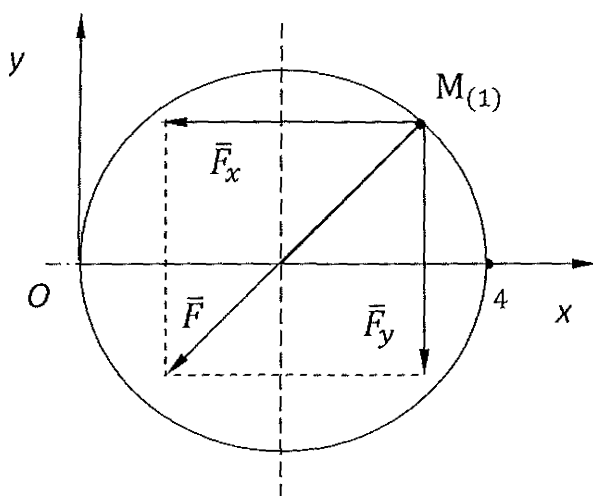


Рис. 4

Действующую силу найдём, составив уравнения

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y.$$

Дважды продифференцируем уравнения движения и найдём проекции ускорения на декартовы оси координат

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi t}{4}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{8} \cos \frac{\pi t}{4}.$$

Тогда

$$F_x = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi t}{4}; \quad F_y = -\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi t}{4}.$$

Определим положение точки М в момент времени $t = 1$ с.

$$x_1 = 2 \sin \frac{\pi}{4} + 2 = 3,14 \text{ м}; \quad y_1 = 2 \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1,14 \text{ м}.$$

Определим численное значение силы в момент времени $t = 1$ с и направляющие косинусы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2,46 \text{ Н}.$$

$$\cos(\vec{F} \vec{i}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{F} \vec{j}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $F = 2,46 \text{ Н}$.

Задача 2 Материальная точка массой $m = 22$ кг движется по окружности радиуса $R = 10$ м (рис. 5) согласно уравнению $S = 0,3 \cdot t^2$.

Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку, в момент времени $t = 5$ с.

Решение. Движение точки задано естественным способом. Определим скорость точки при $t = 5$ с.

$$v = \frac{dS}{dt} = 0,6 \cdot t, \quad \text{при } t = 5 \text{ с} \quad v = 0,6 \cdot 5 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Определим нормальное и тангенциальное ускорения точки.

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = 0,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3^2}{10} = 0,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Из уравнений движения на оси естественных координат имеем

$$F_\tau = m a_\tau = 22 \cdot 0,6 = 13,2 \text{ Н}; \quad F_n = m a_n = 22 \cdot 0,9 = 19,8 \text{ Н},$$

тогда модуль силы F , вызывающей движение, найдём по формуле

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 23,8 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 23,8 \text{ Н}$

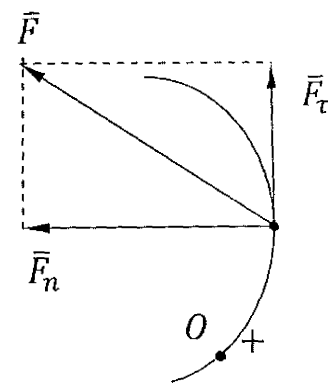


Рис. 5

Вторая (обратная) задача динамики. По заданным силам и массе точки требуется определить закон движения.

Точка может находиться под действием различных сил: постоянных $\vec{F} = const$ (сила тяжести, сила трения и др.); сил, зависящих от времени $\vec{F} = \vec{F}(t)$; сил, зависящих от координат $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ (восстанавливающая сила); сил, зависящих от скорости $\vec{F} = \vec{F}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ (сила вязкого сопротивления) и др.

Вторая основная задача связана с интегрированием. В соответствии с этим можно говорить об относительной сложности этих задач. В прил. 2 приведены некоторые, наиболее часто встречающиеся виды дифференциальных уравнений и их решения.

Методические рекомендации к решению обратной задачи динамики.

1. Изобразить расчётную схему:
 - а) изобразить движущуюся точку в произвольный момент времени;
 - б) направить оси координат по движению точки, причём начало отсчёта совместить с началом движения;
 - в) показать силы, действующие на точку.
2. Составить дифференциальное уравнение движения в выбранных координатах.
3. Решить дифференциальное уравнение. По начальным условиям определить постоянные интегрирования.
4. Определить искомые величины.

Задача 3. Тело, которое можно принять за материальную точку массой m , получив в точке А начальную скорость \vec{v}_0 , движется по наклонной шероховатой поверхности под действием силы тяжести \vec{G} , силы трения $\vec{F}_{тр}$, переменной движущей силы \vec{F} , и реакции \vec{N} . В точке В тело покидает плоскость и продолжает свободное движение под действием силы тяжести и силы сопротивления среды \vec{R} .

Определить уравнения свободного движения тела на участке ВС, если известны: масса тела (точки) $m = 0,5$ кг, начальная скорость $v_A = 12$ м/с, коэффициент трения скольжения $f = 0,22$, угол наклона поверхности АВ к горизонтальной плоскости $\alpha = 30^\circ$, движущая сила $F = 1,2t$, время движения на участке АВ $\tau = 10$ с, сила сопротивления среды на участке ВС $\vec{R} = -0,5\vec{v}$.

Решение. Рассмотрим движение тела (в дальнейшем будем называть его точка) на участке AB . Покажем точку в произвольный момент времени. Направим ось x_1 по движению точки, ось y_1 под прямым углом к оси x_1 . Начало отсчёта совместим с началом движения – с точкой A . Проставим все силы, действующие на точку на этом участке движения. Это: сила тяжести \vec{G} , направленная вертикально вниз; реакция связи, которая раскладывается на две составляющие – нормальную реакцию \vec{N} , направленную перпендикулярно шероховатой поверхности и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленную в сторону, противоположную движению; движущая сила \vec{F} , направленная вдоль оси движения (рис. 6).

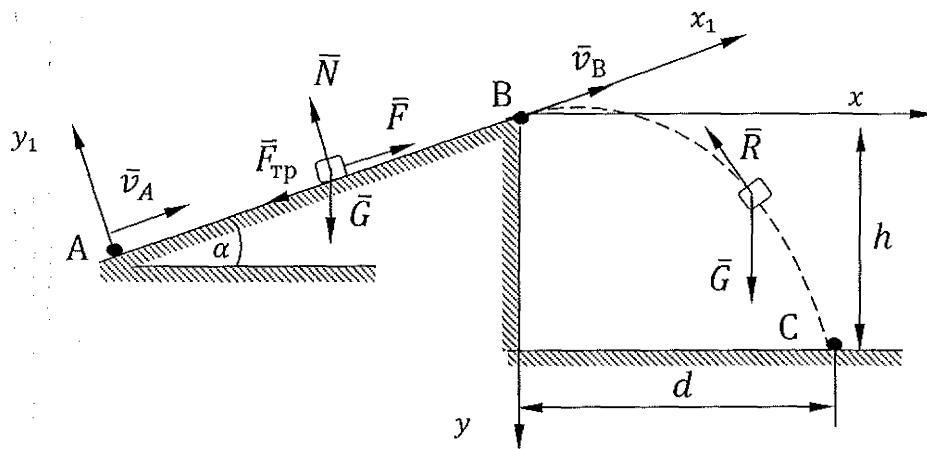


Рис. 6

Запишем основное уравнение динамики в проекциях на координатные оси

$$m\ddot{x}_1 = \Sigma F_{kx_1}, \quad m\ddot{y}_1 = \Sigma F_{ky_1}$$

$$m\ddot{x}_1 = -G\sin\alpha - F_{\text{тр}} + F, \quad m\ddot{y}_1 = -G\cos\alpha + N$$

Так как точка движется только по оси x_1 , то $m\ddot{y}_1 = 0$, поэтому

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha,$$

тогда можно найти силу трения скольжения, которая определяется по формуле

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\alpha.$$

Составим дифференциальное уравнение движения точки по оси x_1

$$m\ddot{x}_1 = -mgsin\alpha - fmg\cos\alpha + F$$

Разделим правую и левую части данного равенства на массу и подставим данные по условию задачи значения

$$\ddot{x}_1 = -g(sin\alpha + f\cos\alpha) + \frac{1,2}{m}t, \quad \text{или}$$

$$\ddot{x}_1 = 2,4t - 6,8.$$

Решим это дифференциальное уравнение, проинтегрировав дважды

$$\dot{x}_1 = 1,2t^2 - 6,8t + C_1;$$

$$x_1 = 0,4t^3 - 3,4t^2 + C_1t + C_2.$$

Подставив начальные условия: $t_0 = 0$, $x_{10} = 0$, $v_0 = v_A = 12$ м/с в эти уравнения, мы найдём постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$C_1 = v_0 = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad C_2 = 0.$$

Окончательно можно записать уравнение скорости и уравнение движения на участке АВ

$$\dot{x}_1 = 1,2t^2 - 6,8t + 12; \quad (5)$$

$$x_1 = 0,4t^3 - 3,4t^2 + 12t$$

Скорость точки в момент времени $\tau = 10$ с, когда она покидает участок АВ, найдём из уравнения (5).

$$\dot{x}_B = 1,2 \cdot 10^2 - 6,8 \cdot 10 + 12 = 64,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Рассмотрим движение точки на участке ВС. Проставим оси координат. Начало отсчёта совместим с точкой В, Ось x направим вправо, ось y вниз. На точку действуют две силы: сила тяжести \vec{G} и сила сопротивления среды \vec{R} . На этом участке точка движется криволинейно, поэтому составим два дифференциальных уравнения движения по оси x и по оси y .

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = R_y + G$$

$$m\ddot{x} = -0,5\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -0,5\dot{y} + mg.$$

Разделим обе части равенства на массу и представим их в виде

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + \dot{y} = g.$$

Как известно из высшей математики, решение дифференциального уравнения по оси x будет иметь вид (6) (уравнения 5, табл. П 1, прил. 2.)

$$x = C_1 + C_2 \cdot e^{-t}; \quad \dot{x} = -C_2 \cdot e^{-t} \quad (6)$$

Решением дифференциального уравнения движения по оси y будет сумма общего решения однородного уравнения и частного решения (уравнение 6, табл. П1, прил.2)

$$y = C_3 + C_4 \cdot e^{-t} + gt; \quad \dot{y} = -C_4 e^{-t} + g \quad (7)$$

Подставим начальные условия в уравнения (6), (7) и найдём постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 .

Начальные условия на участке ВС:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y}_0 = -v_B \sin \alpha.$$

$$C_1 = -C_2 = v_B \cos \alpha, \quad C_3 = -C_4 = v_B \sin \alpha + g.$$

Ответ: $x = 55,4(e^{-t} - 1); \quad y = 41,8(e^{-t} - 1) + gt.$

Тесты для самоконтроля

1. Какое из названных положений является ложным?

- a) Основной закон динамики выполняется только в инерциальных системах отсчёта.
- б) Масса точки является её мерой инертности.
- в) Основной закон Ньютона выражается формулой $m\bar{v} = \Sigma \bar{F}$.
- г) Если система отсчёта неподвижна или движется прямолинейно и равномерно, то она называется инерциальной.

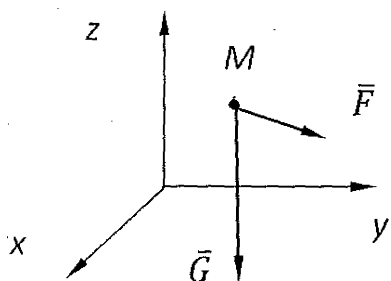
2. Выбрать верный ответ

Материальная точка массой 0,5 кг движется по окружности радиуса $R = 0,5$ м с постоянным касательным ускорением $a_t = 2$ м/с² из состояния покоя. Определить равнодействующую сил, вызывающих это движение в момент времени $t = 1$ с.

- a) $2\sqrt{5}$ Н;
- б) 8 Н;
- в) $\sqrt{17}$ Н;
- г) 4 Н.

3. Выбрать верный ответ

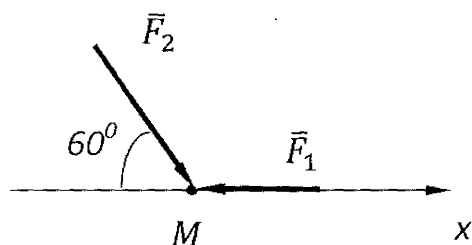
На свободную материальную точку M массой 1 кг действуют сила тяжести \vec{G} (ускорение свободного падения принять $g = 9,8 \text{ м/с}^2$) и сила $\vec{F} = 9,8\vec{k}$. Если в начальный момент времени точка находилась в покое, то в этом случае она будет...



- а) двигаться ускоренно вниз;
- б) находиться в покое;
- в) двигаться равномерно вверх;
- г) двигаться равноускоренно вверх.

4. Выбрать верный ответ

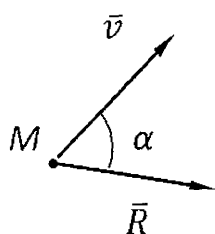
Материальная точка M массой 25 кг движется под действием сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ($F_1 = 5 \text{ Н}$, $F_2 = 10 \text{ Н}$). Проекция ускорения точки на ось Ox равна...



- а) 0;
- б) 4/5;
- в) 2/5;
- г) 1/5.

5. Выбрать верный ответ

Вектор скорости \vec{v} движущейся точки M и равнодействующая \vec{R} всех сил, приложенных к ней, составляют между собой острый угол. Определить характер движения точки M , если $\vec{R} \neq \text{const}$.

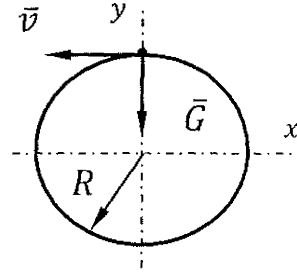


- а) прямолинейное и замедленное;
- б) криволинейное и ускоренное;
- в) криволинейное и замедленное;
- г) прямолинейное и ускоренное.

6. Выбрать верный ответ

Груз весом $G = 3 \text{ кН}$, принимаемый за материальную точку, движется по кольцу радиусом $R = 70 \text{ см}$, находящемуся в вертикальной плоскости. Если давление на кольцо в верхней точке траектории будет равным нулю, то скорость груза в этой точке будет $v = \dots \text{ м/с}$ (при вычислении принять $g = 10 \text{ м/с}^2$).

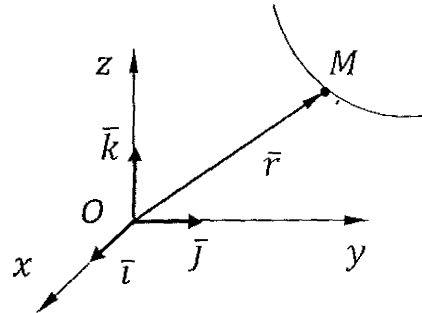
- а) $\sqrt{35}$;
- б) $10\sqrt{7}$;
- в) $\sqrt{7}$;
- г) $\sqrt{21}$.



7. Выбрать верный ответ

Материальная точка M движется по закону $\vec{r} = 5t\vec{i} - 4e^{2t}\vec{j} + t^2\vec{k}$, тогда равнодействующая сил, приложенных к ней, будет направлена:

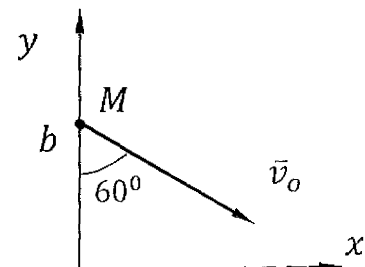
- а) параллельно оси OZ ;
- б) перпендикулярно плоскости OY ;
- в) параллельно плоскости XOY ;
- г) параллельно плоскости YOZ



8. Выбрать верный ответ

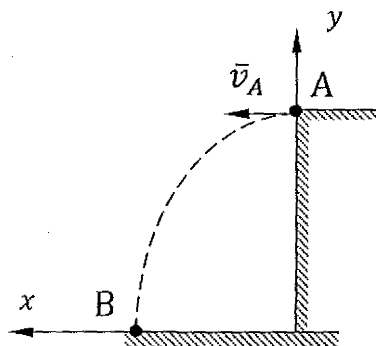
Начало движение точки M показано на рисунке. Известно: равнодействующая сила $\vec{F} = 3x\vec{i} - 1,8tg\vec{j}$, начальная скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$, начальная координата по оси y $b = 4 \text{ м}$. Закон движения точки M по оси y будет равен...

- а) $y = 3t^2 - 10t$;
- б) $y = -0,9gt^2 - 5t + 4$
- в) $y = 1,2t + 10$;
- г) $y = 0,93t^2 - 10t + 4$



9. Выбрать верный ответ

Материальная точка М движется по параболе в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Определить скорость точки в положении В, если в положении А её скорость $v_A = 30$ м/с, а высота $OA = 600$ м. Ответ округлить до целого числа.



- а) 87 м/с;
- б) 24 м/с;
- в) 162 м/с;
- г) 113 м/с.

10. Выбрать верный ответ

На материальную точку массой $m = 20$ кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 0,2 v^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшится с 10 до 5 м/с?

- а) 10 с;
- б) 20 с;
- в) 8 с;
- г) 4 с.

11. Выбрать верный ответ

Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = 5 \cos(0,5t)$. Определить скорость точки в момент времени $t = 4$ с.

- а) 11,05 м/с;
- б) 2,00 м/с;
- в) 4,55 м/с;
- г) 8,00 м/с.