Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
16. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

Свои конспекты прислать мне ТОЛЬКО В ЛИЧНОЕ СООБЩЕНИЕ ВКОНТАКТ

https://vk.com/id588363475

РАБОТЫ В КОММЕРАРИЯХ НА САЙТЕ НЕПРИНИМАЮ!!!

1. **Переписать теоретический материал в тетрадь. Таблицу интегралов переписывать не надо!!! Переписывается все без сокращений!!! ДАЛЕЕ ВЫПОЛНИТЬ ПРАКТИЧЕСКУЮ РАБОТУ ПО ЭТОЙ ТЕМЕ. Практика в этом материале ниже лекции!!!**

Тема «Определённый интеграл и его свойства. Формула Ньютона- Лейбница».

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется ***определённым интегралом от a до b функции f (x):***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Числа a и b называются ***пределами интегрирования, a – нижним, b – верхним.*** Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования.*** Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией,*** а переменная x – ***переменной интегрирования.*** Формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница.***

Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. При перестановки пределов интегрирования меняется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Метод непосредственного интегрирования.

Если *F(x)* – одна из первообразных непрерывной функции *f(x)* на [a,b], то справедлива **формула Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом непосредственного интегрирования, нужно:

1. Найти первообразную F(x) функции f(x) по таблице интегралов, в которой принять C=0, т.е. вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$
2. Подставить в найденную первообразную F(x) сначала верхний предел интегрирования a, а затем нижний предел интегрирования b. Затем из результата первой подстановки вычесть результат второй подстановки, воспользовавшись, таким образом **формулой Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^2 dx$

Решение.

1. Найдем для подынтегральной функции $f(x) = x^2$ первообразную по таблице интегралов (формула 2 в таблице интегралов) и получим:

   $$F(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

   Примем в этой первообразной C=0. Оформление решения имеет вид:

   $$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

2. Далее воспользуемся формулой **Ньютона-Лейбница.** Для этого в найденную первообразную вместо x подставим верхний предел интегрирования 3, а затем нижний предел интегрирования 1 и из результата первой подстановки вычтем результат второй подстановки.

   $$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл: $\int_{-1}^2 (x-3)(x^2+4)dx$

Решение.

Для вычисления данного интеграла сначала раскроем скобки:

$$\int_{-1}^{2}(x-3)(x^2+4)dx = \int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4x-12)dx$$

Далее воспользуемся следующим свойством 2 определенного интеграла:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

и получим: $\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4x-12)dx = \int_{-1}^{2} x^3dx - \int_{-1}^{2} 3x^2dx + \int_{-1}^{2} 4xdx - \int_{-1}^{2} 12dx$

Далее воспользуемся свойством 1 определенного интеграла:
постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b \mathrm{A}f(x)dx = \mathrm{A}\int_a^b f(x)dx$$

Получим:

$$\int_{-1}^{2} x^3dx - \int_{-1}^{2} 3x^2dx + \int_{-1}^{2} 4xdx - \int_{-1}^{2} 12dx = \int_{-1}^{2} x^3dx - 3\int_{-1}^{2} x^2dx + 4\int_{-1}^{2} xdx - 12\int_{-1}^{2} dx$$

Теперь для каждой из 4-х функций найдем первообразную в таблицеинтегралов (применим для 1,2 и 3 функций формулу 2, а для 4 формулу 1) и получим:

$$\int_{-1}^{2} x^3dx - 3\int_{-1}^{2} x^2dx + 4\int_{-1}^{2} xdx - 12\int_{-1}^{2} dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

Далее воспользуемся формулой **Ньютона-Лейбница.** Для этого в найденные первообразные вместо х подставим верхний предел интегрирования 2, а затем нижний предел интегрирования -1 и из результата первой подстановки вычтем результат второй подстановки и получим:

$$\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2\cdot 2^2 - 12\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 2(-1)^2 - 12(-1)\right) =$$

$$= (4-8+8-24) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + 2 + 12\right) = -20 + \frac{1}{4} - 15 = -35 + \frac{1}{4} = -\frac{140}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{139}{4} = -34\frac{3}{4}$$

Оформление решения данного примера (без словесных объяснений) имеет вид:

$$\int_{-1}^{2}(x-3)(x^2+4)dx = \int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4x-12)dx = \int_{-1}^{2} x^3dx - \int_{-1}^{2} 3x^2dx + \int_{-1}^{2} 4xdx - \int_{-1}^{2} 12dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x^3dx - 3\int_{-1}^{2} x^2dx + 4\int_{-1}^{2} xdx - 12\int_{-1}^{2} dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 12x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 2(-1)^2 - 12(-1)\right) =$$

$$= (4-8+8-24) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + 2 + 12\right) = -20 + \frac{1}{4} - 15 = -35 + \frac{1}{4} = -\frac{140}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{139}{4} = -34\frac{3}{4}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2}(2-x)^2dx$

Решение.

Для вычисления данного интеграла сначала раскроем квадрат по формуле сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Решение данного примера будет иметь вид:

$$\int_{-1}^{2}(2-x)^2dx = \int_{-1}^{2}(2^2-2\cdot 2\cdot x+x^2)dx = \int_{-1}^{2}(4-4x+x^2)dx = \int_{-1}^{2}4dx - \int_{-1}^{2}4xdx + \int_{-1}^{2}x^2dx = 4\int_{-1}^{2}dx - 4\int_{-1}^{2}xdx + \int_{-1}^{2}x^2dx = \left(4x - 4\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(4x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(4\cdot 2-2\cdot 2^2+\frac{2^3}{3}\right) - -\left(4\cdot(-1)-2\cdot(-1)^2+\frac{(-1)^3}{3}\right) = \left(8-8+\frac{8}{3}\right)-\left(-4-2-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}+6+\frac{1}{3} = \frac{9}{3}+6 = 3+6 = 9$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt[10]{x^3}dx$

Решение.

Для вычисления данного интеграла сначала преобразуем подынтегральную функцию. Воспользуемся свойством степеней, избавимся от корня(сделаем корень в виде дробной степени):

$$\int_0^1 \sqrt[10]{x^3}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{10}}dx = \frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1}\Bigg|_0^1 = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}}\Bigg|_0^1 = \frac{10}{13}\cdot x^{\frac{13}{10}}\Big|_0^1 = \frac{10}{13}\cdot\sqrt[13]{x^{10}}\Big|_0^1 = \frac{10}{13}\cdot\sqrt[13]{1^{10}} - \frac{10}{13}\cdot\sqrt[13]{0^{10}} = = \frac{10}{13}\cdot 1 - \frac{10}{13}\cdot 0 = \frac{10}{13}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}dx$

Решение.

Для вычисления данного интеграла сначала преобразуем подынтегральную функцию. Воспользуемся свойством степеней:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{10}}} = \int_0^1 x^{-\frac{3}{10}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{10}+1}}{-\frac{3}{10}+1}\Bigg|_0^1 = \frac{x^{\frac{7}{10}}}{\frac{7}{10}}\Bigg|_0^1 = \frac{10}{7}\cdot x^{\frac{7}{10}}\Big|_0^1 = \frac{10}{7}\cdot\sqrt[10]{x^7}\Big|_0^1 = = \frac{10}{7}\cdot\sqrt[10]{1^7} - \frac{10}{7}\cdot\sqrt[10]{0^7} = \frac{10}{7}\cdot 1 - \frac{10}{7}\cdot 0 = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

2. Выполнить в тетради практическую работу!! Оформляем работу как положено: тема, наименование и т.д.!!!

Практическое занятие №23.

Тема: Первообразная и интеграл.

Наименование работы: Интегрирование функций**.**

Цель: Отработать навыки интегрирования функций..

Норма времени: 2 часа

Место проведения: кабинет «Математики»

Материально – техническое оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетрадь, ручка.

Литература:

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования- 9-е изд., стер- М: Издательский центр «Академия», 2014
2. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования- 10-е изд., стер- М:. Издательский центр, 2014.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие

для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
2. Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы: учебник. 2-е изд., испр. и доп.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2013
3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике : учеб. пособие для ссузов- 10-е изд., стереотип. -М.:Дрофа, 2014.
4. Омельченко В.П. Математика: учеб. пособие- Изд. 7-е, стер.- Ростов н/Д: Феникс,
Вступительный инструктаж, правила техники безопасность:

1. Работу выполнять строго по инструкционной карте.
2. Рабочее место держать в чистоте и порядке.
3. Посторонние вещи убрать.
4. Правила работы с книгами.

Вопросы для допуска к выполнению практической работе:

1. Как называется операция нахождения первообразной для функции?
2. Сколько первообразных может меть функция?
3. Чем отличается неопределённый интеграл от определённого?
4. Что происходит с постоянным множителем при интегрировании?
5. Чему равен интеграл суммы?

Содержание и последовательность выполнения работы:

1. Алибаева А.
2. Антонова Л.
3. Буланкина Д.
4. Еременко А.
5. Нектова Е.
6. Федорова В.
7. Уметбаева К.
8. Гумерова Т.

Ваш номер по этому списку соответствует номеру варианта, который вы должны решить.

ВАЖНО!!!! Решение примеров, оформление решения делаем так, как показано в теоретическом материале выше в лекции. Пример 1 в практике смотри решение примера 2 в лекции, пример 2 в практике смотри решение примера 3 в лекции, пример 3 в практике смотри решение примеров 4 или 5 в лекции!!!

Задание: Вычислите определённые интегралы:

Вариант1

1. $\int_{-1}^{2}(x^3 - 1)(2 + x^2)dx$
2. $\int_{-1}^{2}(3x + 2)^2 dx$
3. $\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x^4}dx$

Вариант2

1. $\int_{-1}^{1}(x^3 + 2)(1 - x^2)dx$
2. $\int_{-1}^{1}(2x - 1)^2 dx$
3. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

Вариант3

1. $\int_{-1}^{1}(x^4-2)(3-x^2)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(4x-2)^2dx$

3. $\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x^2}dx$

Вариант4

1. $\int_{-1}^{1}(x^4+3)(x^2-1)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(3x+1)^2dx$

3. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Вариант5

1. $\int_{-1}^{1}(x^2+1)(2+x^2)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(5x-1)^2dx$

3. $\int_{0}^{1}\sqrt[4]{x^3}dx$

Вариант6

1. $\int_{-1}^{1}(x^2-3)(1-x^2)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(2x+2)^2dx$

3. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

Вариант7

1. $\int_{-1}^{1}(x^5-2)(1+x^3)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(6x+1)^2dx$

3. $\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x^5}dx$

Вариант8

1. $\int_{-1}^{1}(x^4+1)(2-x^2)dx$

2. $\int_{-1}^{1}(7x-1)^2dx$

1

3. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$