Свои конспекты прислать мне ТОЛЬКО В ЛИЧНОЕСООБЩЕНИЕ ВКОНТАКТ

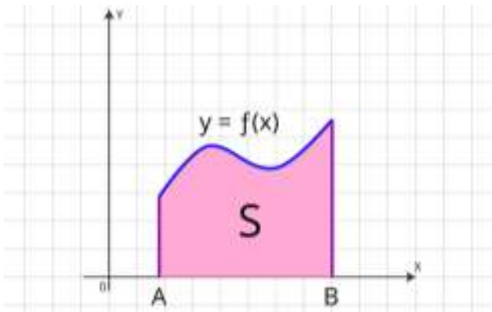
https://vk.com/id588363475

РАБОТЫ В КОММЕРАРИЯХ НА САЙТЕ НЕ ПРИНИМАЮ!!!

Переписать теоретический материал в тетрадь. Переписывается все без сокращений!!!ВМЕСТЕ С ПРИМЕРАМИ!!

ТЕМА «ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЬЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ».

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной на отрезке [a;b] функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b] оси OX.



При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (вокруг оси OX).

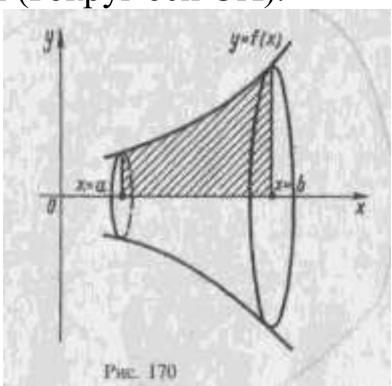


Рис. 170

На чертеже показано тело вращения, которое получилось путем вращения криволинейной трапеции(она заштрихована) вокруг оси OX.

Объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)* ($a \le x \le b$), осью *Ox* и прямыми *x = a* и *x= b* (рис. 170), вычисляется по формуле:

$$V = \Pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В формуле перед интегралом обязательно присутствует число Пи (π) . На практике объёмы тел вращения связаны всегда с этой константой.

Пример 1

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной линиями : y=2x-2, y=0,x=3.

Решение:

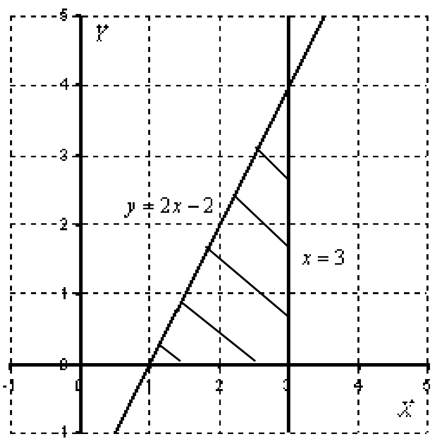
Сначала выполним построение:

Графиком функции y=2x-2 является прямая. Для ее построения достаточно 2-х точек. Найдем их с помощью таблицы

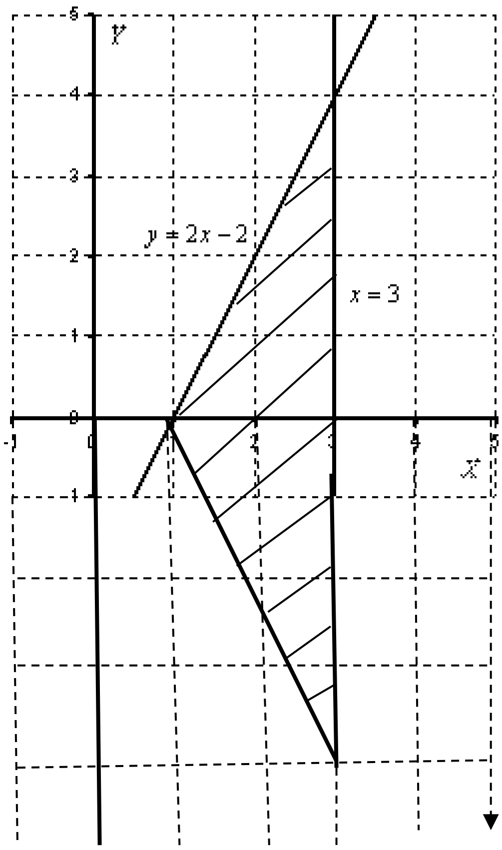
x	0	1
y	-2	0

график функции y=0 задает саму ось Ox,

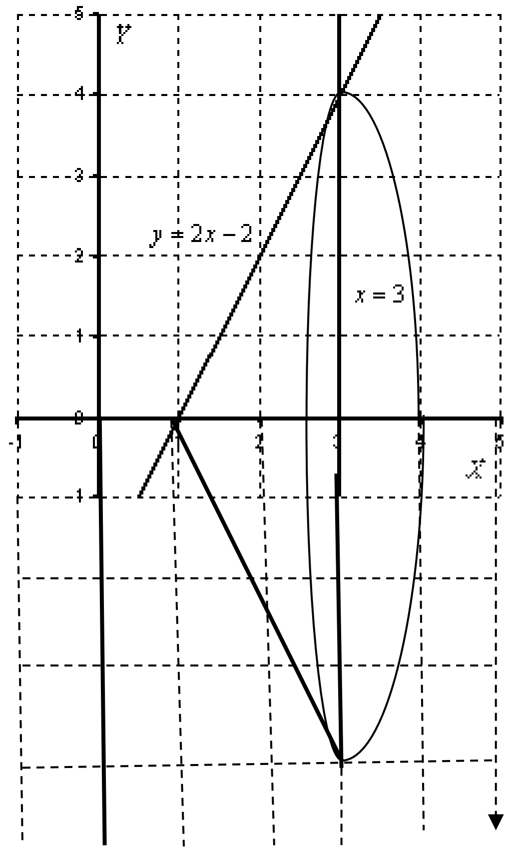
прямая x=-3 проходит через точку x=-3 параллельно оси Oy.



Получилась фигура (криволинейная трапеция)- заштрихованная область на чертеже. Теперь мы эту трапецию будем вращать вокруг оси OX и получим тело вращения:



Для наглядности на следующем чертеже показано, что получился конус



Объём получившегося конуса (тела вращения) нам и нужно найти в задаче.

Воспользуемся формулой: $V = \Pi\int_a^b f^2(x)dx$

Функция f(x) в данной формуле-что это за функция и где её взять? Посмотрите на чертеж. Плоская фигура ограничена графиком прямой y=2x-2 сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.Что касается пределов интегрирования, то в задаче дан только верхний предел b (по условию фигура ограничена справа графиком функции x=3). Таким образом, b=3. А вот нижний предел интегрирования a необходимо найти.
По чертежу видно, что это будет точка пересечения графика функции y=2x-2 с осью OX. Таким образом, для нахождения нижнего предела интегрирования надо решить уравнение 2x-2=0

2x=2

x=1

Получили a=1-нижний предел интегрирования в формуле.
Таким образом, получим:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_1^3 (2\text{x}-2)^2 dx$$

Квадрат функции в формуле раскроем по формуле:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

И получим: $V = \pi\int_1^3 (2\text{x}-2)^2 dx = \pi\int_1^3 ((2\text{x})^2 - 2\cdot 2\text{x}\cdot 2 + 2^2)\, dx = \pi\int_1^3 (4x^2 - 8x + 4)dx = \pi\int_1^3 4x^2\, dx - \pi\int_1^3 8x\, dx + \pi\int_1^3 4\, dx = \pi 4\int_1^3 x^2\, dx - \pi 8\int_1^3 x\, dx + \pi 4\int_1^3 dx = \pi\left(4\int_1^3 x^2\, dx - 8\int_1^3 x\, dx + 4\int_1^3 dx\right) = \pi\left(4\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^3 = \pi\left(4\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 4x\right)\Big|_1^3 =$

$\pi\left(\left(4\frac{3^3}{3}-4\cdot3^2+4\cdot3\right)-\left(4\frac{1^3}{3}-4\cdot1^2+4\cdot1\right)\right)=\pi\left((4\cdot9-4\cdot9+12)-\left(\frac{4}{3}-4+4\right)\right)=\pi\left(12-\frac{4}{3}\right)=\pi\left(\frac{36}{3}-\frac{4}{3}\right)=\pi\cdot\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\pi$ куб. ед.

Ответ: $V=10\frac{2}{3}\pi$ куб. ед.

Пример 2.

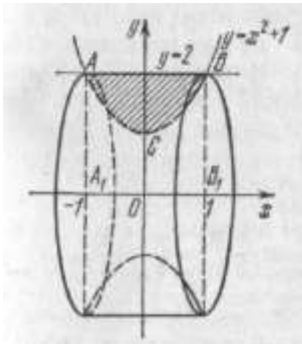
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной линиями : $y=x^2+1$, $y=2$.

Решение:

Сначала выполним построение:

Графиком функции $y=x^2+1$ является парабола, ветви которой направлены вверх и вершина смещена на 1 единицу вверх по оси ОУ.

Графиком функции $y=2$ является прямая линия, проходящая через точку $y=2$ параллельно оси Ох.



Из чертежа видно, что искомый объем равен разности объемов тел, образованных при вращении вокруг оси *Ох* фигур A_1ABB_1 и A_1ACBB_1.

Фигура A_1ABB_1 ограничена сверху прямой $y=2$. Значит когда мы будем находить её объём, то в формуле $V=\Pi\int_a^b f^2(x)dx$ $f(x)=2$

Фигура A_1ACBB_1 ограничена сверху параболой $y=x^2+1$. Значит когда мы будем находить её объём, то в формуле $V=\Pi\int_a^b f^2(x)dx$ $f(x)=x^2+1$

В формуле $V=\Pi\int_a^b f^2(x)dx$ нам не даны пределы интегрирования a и b. Их необходимому найти.

Из чертежа видно, что пределы интегрирования- это точки пересечения двух заданных графиков: $y=x^2+1$ и $y=2$. Поэтому, чтобы найти пределы интегрирования, необходимо решить уравнение: $x^2+1=2$

$x^2=2-1$

$x^2=1$

$x=\pm\sqrt{1}$

$x=\pm1$

Таким образом, найдены пределы интегрирования a=-1 и b=1

Теперь найдем объёмы двух фигур: A_1ABB_1 и A_1ACBB_1.

$$V_{A1ABB1}=\pi\int_{-1}^{1}2^2dx=\pi\int_{-1}^{1}4dx=$$

$$=\pi\cdot4\int_{-1}^{1}dx=\pi(4x)|_{-1}^{1}=\pi(4\cdot1-4\cdot(-1))=\pi(4+4)=\pi\cdot8=8\pi \text{ куб. ед.}$$

$$V_{\mathrm{A1ACBB1}} = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} ((\mathrm{x}^2)^2 + 2 \cdot \mathrm{x}^2 \cdot 1 + 1^2)\, dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4+2x^2+1) dx = \pi \int_{-1}^{1} x^4\, dx + \pi \int_{-1}^{1} 2x^2\, dx + \pi \int_{-1}^{1} 1\, dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} x^4\, dx + \pi \cdot 2 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + \pi \int_{-1}^{1} dx =$$

$$= \pi \left(\int_{-1}^{1} x^4\, dx + 2 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + \int_{-1}^{1} dx \right) = \pi \left(\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi \left(\left(\frac{1^5}{5} + 2\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + 2\frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) \right) =$$

$$= \pi \left(\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 \right) = \pi \cdot \left(\frac{6}{15} + \frac{20}{15} + \frac{30}{15} \right) = \frac{56}{15}\pi = 3\frac{11}{15}\pi \ \text{куб. ед.}$$

$$V = \mathrm{V}_{A1ABB1} - V_{\mathrm{A1ACBB1}} = 8\pi - 3\frac{11}{15}\pi = 8\pi - \frac{56}{15}\pi = \frac{120\pi}{15} - \frac{56\pi}{15} = \frac{64\pi}{15} =$$

$$= 4\frac{4}{15}\pi \ \text{куб. ед.}$$